Argomenti del corso

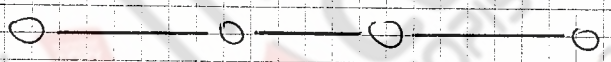
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- DINAMICA
  - equazioni fondamentali
  - dinamica delle macchine
  - dinamica dei sistemi vibranti

- MECCANICA DEI CONTATTI
  - contatti a secco
  - contatti lubrificati

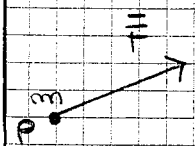
- TRASMISSIONI MECCANICHE
  - ruote dentate
  - giunti
  - camme
  - organi flessibili

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



FORZE

Punto materiale: la formula fondamentale della dinamica del p.to materiale è la prima equazione cardinale della dinamica secondo cui



$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

$$\underline{F} = m\underline{a} = \underline{0} \Rightarrow$$ la somma di tutte le forze esterne che agiscono su un p.to materiale sommata alla forza di inerzia deve essere uguale al vettore nullo.

$$\underline{F}_i = -m\underline{a}$$

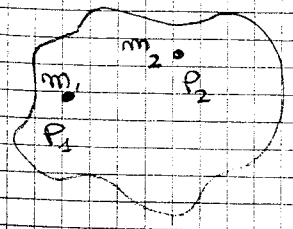
(forza di inerzia)

Quantità di moto: $\bar{Q} = m\bar{v}$ è l'accelerazione

Se derivo rispetto al tempo $\Rightarrow \dot{\bar{Q}} = m\dot{\bar{v}} = m\bar{a}$

Da cui $\bar{F}_i = -\dot{\bar{Q}}$

SISTEMA DI MASSE



La forza di inerzia totale è data dalla somma di tutte le singole forze di inerzia associate alle singole masse.

$$m_{TOT} = \sum_{j=1}^{3} m_j \qquad \bar{F}_{i\,TOT} = -\sum_{j=1}^{3} m_j \bar{a}_j$$

È possibile mettere in relazione la quantità di moto $\bar{Q}$ con la massa totale m e la velocità $\bar{V}_G$ del baricentro

BARICENTRO rispetto ad un polo O: $\overline{OG} = \frac{\sum m_j \overline{OP_j}}{m_{TOT}}$

Se derivo rispetto al tempo ottengo:

$$\bar{V}_G - \bar{V}_O = \frac{\sum m_j (\bar{V}_{P_j} - \bar{V}_O)}{m_{TOT}} = \frac{\sum m_j \bar{V}_{P_j}}{m} - \frac{\sum m_j \bar{V}_O}{m}$$

differenza tra velocità del baricentro e velocità del punto O (caso più generale in cui O è un punto qualunque che può anche muoversi)

La posizione del baricentro è indipendente dal p.to di riferimento

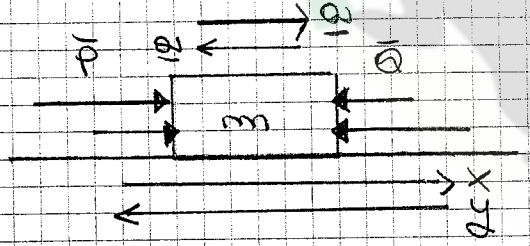
Da cui $\Rightarrow m\bar{V}_G = \sum m_j \bar{V}_{P_j}$ quantità di moto totale del corpo

$\Rightarrow \bar{Q}_{TOT} = \sum m_j \bar{V}_j \Rightarrow \bar{Q}_{TOT} = m_{TOT} \bar{V}_G$ se derivo rispetto al tempo ottengo:

$m\bar{a}_G = \sum m_j \bar{a}_j$ è l'opposto dell'espressione della forza di inerzia

$$\boxed{\bar{F}_{i\,TOT} = -m_{TOT}\bar{a}_G = -\dot{\bar{Q}}}$$ Formula fondamentale

$\sum(\bar{F}_e + \bar{F}_i) = 0$; $\sum \bar{F}_e = \bar{R}$ = risultante di tutte le forze esterne



Supponiamo di avere due forze P e Q. m può scorrere solo orizzontalmente. E supponiamo di essere in assenza di attrito. Sotto l'azione di P e Q, m subisce un'accelerazione $\bar{a}$

$\bar{P} + \bar{Q} - m\bar{a} = 0$

In modulo: $P - Q - m\ddot{x} = 0$, (accelerazione della massa puntiforme)

equazione scalare corrispondente alla proiezione sull'asse x

N.B. La scelta del verso dell'asse x, influenza i segni di P e Q, ma non di $-m\ddot{x}$

Se considero l'asse y, // e opposto a x ottengo:

$-P + Q - m\ddot{y} = 0$

$P - Q = m\ddot{x} \Rightarrow$ 1) se $P > Q \Rightarrow \ddot{x} > 0$

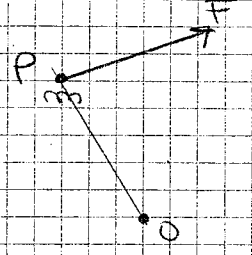
2) se $P < Q \Rightarrow \ddot{x} < 0$ (il corpo rallenta)

Se il corpo oltre a traslare, ruota, entrano in gioco i momenti di inerzia. F_i verrà sostituito con il momento di inerzia totale, m_{iG} sarà il momento rispetto a un polo, a_G sarà non più un'accelerazione lineare, ma angolare.

N.B. È comodo calcolare i momenti di inerzia rispetto a un pto fisso o rispetto al baricentro.

MOMENTI

$\bar{M}_O = \bar{OP} \wedge \bar{F}$



Il momento della forza di inerzia rispetto ad O è

$\bar{M}_{iO} = -\bar{OP} \wedge m\bar{a}$ (accelerazione del p.to P)

- Momento della quantità di moto $\bar{Q}$ rispetto ad un polo O

$\bar{K}_O = \bar{OP} \wedge m\bar{v}$

SISTEMA DI MASSE

Data m masse $\Rightarrow$ $\bar{M}_{iO} = -\sum_{j=1}^{m} \bar{OP}_j \wedge m_j \bar{a}_j$

Se derivo rispetto al tempo il momento della quantità di moto $\bar{K}_O$, ottengo:

$\bar{K}_O = \bar{OP} \wedge m\bar{v} \Rightarrow \dot{\bar{K}}_O = \sum \bar{OP}_j \wedge m_j \bar{v}_j$

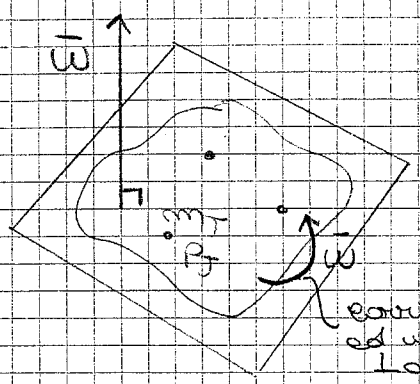
$\Rightarrow \dot{\bar{K}}_O = \sum \underbrace{(\bar{v}_j - \bar{v}_O) \wedge m_j \bar{v}_j}_{\text{perché } v_O \wedge m_j v_j \text{ è nullo perché prodotto tra vettori } //} + \underbrace{\sum \bar{OP}_j \wedge m_j \bar{a}_j}_{\text{è l'opposto del momento della forza di inerzia rispetto ad O}}$

$\Rightarrow \dot{\bar{K}}_O = -\bar{v}_O \wedge \underbrace{\sum m_j \bar{v}_j}_{Q} - \bar{M}_{iO}$

$\bar{v}_O = \underline{0}$ (cioè O è fisso)

Da cui $\bar{M}_{iO} = -\dot{\bar{K}}_O - \bar{v}_O \wedge Q$ questo termine vale zero se $\bar{a} \in \bar{v}_O$ // oppure $O \equiv G$

$$\bar{M}_{i_O} = -\dot{\bar{K}}_O - \bar{V}_O \wedge \bar{a}$$



Relazione tra due punti dello stesso corpo rigido sul piano

$$\bar{V}_j = \bar{V}_O + \bar{\omega} \wedge \bar{OP}_j$$

Sostituendo $\bar{V}_j$ nel momento della quantità di moto, ottengo

$$\bar{K}_O = \sum \bar{OP}_j \wedge m_j (\bar{V}_O + \bar{\omega} \wedge \bar{OP}_j)$$

$$= \sum \bar{OP}_j \wedge m_j \bar{V}_O + \sum m_j \underbrace{(\bar{OP}_j \cdot \bar{OP}_j)}_{= \bar{OP}_j^2} \bar{\omega} - \sum m_j \underbrace{(\bar{OP}_j \cdot \bar{\omega})}_{\text{prodotto}} \bar{OP}_j$$

momento di inerzia rispetto ad O

$$= \sum m_j \bar{OP}_j \wedge \bar{V}_O + \underbrace{\left(\sum m_j \bar{OP}_j^2\right)}_{J_O} \bar{\omega} =$$

velocità angolare riferita al corpo e non al p.to

$$= m_{TOT}\, \bar{OG} \wedge \bar{V}_O + J_O \bar{\omega}$$

momento di inerzia rispetto ad O (lo consideriamo costante)

Se derivo rispetto al tempo:

$$\dot{\bar{K}}_O = m(\bar{V}_G - \bar{V}_O) \wedge \bar{V}_O + m\bar{OG} \wedge \bar{a}_O + J_O \bar{\dot{\omega}}$$

accelerazione angolare del corpo

$$\Rightarrow \dot{\bar{K}}_O = \underbrace{m\bar{V}_G}_{\text{quantità di moto } \bar{Q}} \wedge \bar{V}_O + m\bar{OG} \wedge \bar{a}_O + J_O \bar{\dot{\omega}}$$

Da cui $\bar{M}_{i_O} = -\bar{Q} \wedge \bar{V}_O - m\bar{OG} \wedge \bar{a}_O - J_O \bar{\dot{\omega}} - \bar{V}_O \wedge \bar{Q}$

Da cui

$$\boxed{\bar{M}_{i_O} = -m\bar{OG} \wedge \bar{a}_O - J_O \bar{\dot{\omega}}}$$

è $= \underline{0}$ se
- O è p.to fisso
- $O \equiv G$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

IN SINTESI

Le formule fondamentali sono: $\sum \bar{F}_e + \bar{F}_i = \bar{0}$ dove $\bar{F}_i = -m\bar{a}_G$

$\sum \bar{F}_e$ = forze esterne totali

Per i momenti:

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{OP_j} \wedge \bar{F}_j + \sum \bar{M} + \bar{M}_{io} = \bar{0} \quad \text{dove } \bar{M}_{io} = -\dot{\bar{K}}_o - \bar{V}_o \wedge \bar{Q}$$

CASO PIANO: l'espressione del momento di inerzia rispetto al polo O è

$$\boxed{\bar{M}_{io} = -J_o \bar{\omega} - \overline{OG} \wedge m\bar{a}_o}$$

Si considera come polo il baricentro $\Rightarrow \bar{M}_{iG} = -J_G \bar{\omega}$

— o — o —

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

RELAZIONE TRA $\bar{M}_{io}$ e $\bar{M}_{iG}$

J_o = momento di inerzia rispetto al polo O $= J_G + m(d^2) = J_G + mOG^2$

distanza tra G e il polo O

Applico il teorema di Rivals per calcolare l'accelerazione di O ($\bar{a}_o$)

$$\bar{a}_o = \bar{a}_G + \bar{\omega} \times \overline{GO} - \omega^2 \overline{GO}$$

$$\bar{M}_{io} = -(J_G + mOG^2)\bar{\omega} - \overline{OG} \wedge m(\bar{a}_G + \bar{\omega} \wedge \overline{GO} - \omega^2 \overline{GO}) =$$

$$= -J_G\bar{\omega} - mOG^2\bar{\omega} - \left[\overline{OG} \wedge m\bar{a}_G - (m\overline{OG} \cdot \bar{\omega})\overline{GO} + m(\overline{OG} \cdot \overline{GO})\bar{\omega}\right]$$

$$- \overline{OG} \wedge m\omega^2 \overline{GO} \Big]$$

si annulla perché è un prodotto scalare tra due vettori ortogonali

$-mOG^2\bar{\omega}$ che con il meno fuori diventa positivo quindi si elide con $-mOG^2\bar{\omega}$

Da cui ottengo

$$\boxed{\bar{M}_{io} = -J_G\bar{\omega} - \overline{OG} \wedge m\bar{a}_G}$$